Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen haben die allgemeine Funktionsgleichung

$$y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Man nennt diese Darstellung einer quadratischen Funktion die **Polynomdarstellung**.
(Alternative Darstellungen sind die Scheitelpunktdarstellung und die Linearfaktordarstellung.)
Wie bei den linearen Funktionen sind *x* und *y* die Variablen.
Die Parameter heißen jetzt jedoch *a, b* und *c*.
Die graphische Darstellung einer quadratischen Funktion ist eine **Parabel**.
Parabeln haben folgende charakteristische Punkte, die sich mit den angegebenen Formeln berechnen lassen:

- den Scheitelpunkt (Hoch- oder Tiefpunkt): SP(x_{SP} | y_{SP})
  $x_{SP} = \frac{-b}{(2 \cdot a)}$ y_{SP} erhält man durch Einsetzen von x_{SP} in $f(x)$
- den Schnittpunkt mit der y-Achse: S_y (0 | *c*)
- maximal 2 Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen): S_{x1} (x_1 | 0) und S_{x2} (x_2 | 0).
  Diese werden nach Division durch *a* mit der p-q-Formel berechnet:

$$x^2 + px + q = 0 \;\rightarrow\; x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel:

Die Faustformel für den Anhalteweg y (in m) eines Fahrzeuges in Abhängigkeit von dessen Geschwindigkeit x (in km/Std.) ist

$y = f(x) = \frac{x}{10} \cdot \frac{x}{10} + \frac{x}{10} \cdot 3$ bzw.

$y = f(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 + \frac{3}{10} \cdot x$

Hier ist also a = 1/100, b = 3/10 und c = 0.

Der quadratische Term $\frac{1}{100} \cdot x^2$ ist übrigens der Bremsweg, der lineare Term $\frac{3}{10} \cdot x$ der Reaktionsweg, also der Weg, den man in der einen Sekunde zurücklegt, bis man überhaupt auf ein Hindernis durch Bremsen reagiert.

Aufgabe 1

a) Ermitteln Sie den Anhalteweg bei einer Geschwindigkeit von 30 km/h, 50 km/h, 100 km/h und 160 km/h.
b) Welche Geschwindigkeit hatte ein Fahrzeug, das einen Anhalteweg von 100 m / 200 m hat?

Aufgabe 2

Um den Verlauf einer Parabel zu beschreiben, kann man zum Beispiel angeben,

- ob sie nach oben oder unten geöffnet ist,
- ob sie gedehnt (lang und schmal) oder gestaucht (breit) oder eine "Normalparabel" ist,
- wo sie die y-Achse schneidet,
- wo sie ihren Scheitelpunkt hat,
- ob sie Nullstellen besitzt und – wenn ja – wo diese liegen.

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen bezüglich der oben genannten Kriterien. Legen Sie ferner jeweils eine sinnvolle Wertetabelle an und zeichnen Sie die Parabeln.

a) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 10$

c) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 3x + 3$

d) $f(x) = -x^2 + 6x - 8$

Aufgabe 3

Erstellen Sie für die Funktionen der Aufgabe 2 jeweils eine Wertetabelle, die den Scheitelpunkt in der Mitte und je 3 Punkte rechts und symmetrisch dazu links enthält. Zeichnen Sie anschließend die Funktionsgraphen (Parabeln).

Aufgabe 4

Ermitteln Sie jeweils die gemeinsamen Schnitt- oder Berührungspunkte der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ durch Gleichsetzen. Zeichnen Sie anschließend beide Funktionsgraphen und überprüfen Sie die Ergebnisse der Berechnung in der Zeichnung.

Tipp: Für die Zeichnungen von Parabeln benötigen Sie jeweils den Scheitelpunkt der Parabel und eine Wertetabelle mit je (mindestens) 3 Punkten rechts und links vom Scheitelpunkt.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$
$g(x) = x - 3$

b) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$
$g(x) = -2x^2 - 4x + 5$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$
$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 15$

d) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 10$
$g(x) = \frac{3}{4}x^2 - 9x + 22$

e) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$
$g(x) = x^2 - 10x + 22$

f) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$
$g(x) = x^2 + 6x + 7$